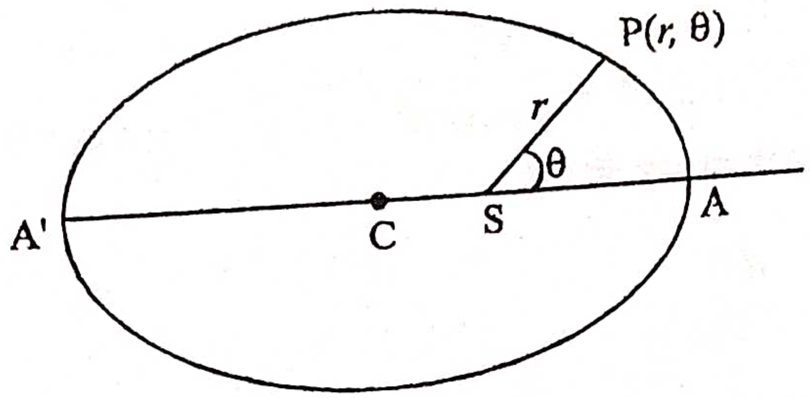
यही अभीष्ट समय देता है।

प्रमेय 3. दीर्घाक्ष के निकटतम सिरे से आरम्भ होकर दीर्घवृत्तीय कक्ष की किसी दी गई चाप को निर्मित करने का समय ज्ञात करना। **(रायपुर 2009)**

प्रमाण (Proof)—माना S ध्रुव तथा SA आदि रेखा है। तब दीर्घवृत्त का ध्रुवीय समीकरण है—

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta, \ (e < 1) \qquad \text{...(1)}$$



चित्र

पुनः हम जानते हैं कि

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h$$

$$\Rightarrow \qquad hdt = r^2 d\theta$$

समाकलन करने पर,

$$h\int_0^t dt = \int_0^\theta r^2 d\theta$$

$$\Rightarrow \qquad ht = \int_0^\theta \frac{l^2}{(1 + e\cos\theta)^2} d\theta, \qquad \text{[समी. (1) से]}$$

$$\Rightarrow \qquad ht = l^2 \int_0^\theta \frac{1}{(1 + e\cos\theta)^2} d\theta \qquad \text{...(2)}$$

अब $\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right\}=\frac{(1+e\cos\theta)\cos\theta+e\sin^2\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$

$$=\frac{e+\cos\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{(1+e\cos\theta)-(1-e^2)}{e(1+e\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{1}{e(1+e\cos\theta)}-\frac{1-e^2}{e}\cdot\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1-e^2}{e}\cdot\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{1}{e(1+e\cos\theta)}-\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right\}$$

अत: समाकलन करने पर,

$$\frac{1-e^2}{e}\int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}=\frac{1}{e}\int_0^\theta \frac{d\theta}{1+e\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{1}{1-e^2}\int_0^\theta \frac{d\theta}{1+e\cos\theta}-\frac{e}{1-e^2}\cdot\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta} \quad ...(3)$$

पुन: हम जानते हैं कि

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{1+e\cos\theta}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right\}, \text{ यदि } e<1. \quad ...(4)$$

अत: समी. (2), (3) तथा (4) से,

$$ht=l^2\left[\left\{\frac{2}{(1-e^2)^{3/2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right\}-\frac{e}{1-e^2}\cdot\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right]$$

$$\sqrt{\mu l}\,t=l^2\left[\left\{\frac{2}{(1-e^2)^{3/2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right\}-\frac{e}{1-e^2}\cdot\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right], \quad [\because h=\sqrt{\mu l}]$$

$$\Rightarrow \quad t=\frac{l^{3/2}}{\sqrt{\mu}}\left[\left\{\frac{2}{(1-e^2)^{3/2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right\}-\frac{e}{1-e^2}\cdot\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right]$$

$$\Rightarrow t=\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}\left[2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}-e\sqrt{1-e^2}\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right]$$

$$\left[\because l=\frac{b^2}{a}=\frac{a^2(1-e^2)}{a}=a(1-e^2)\right]\text{. उत्तर}$$

प्रमेय 4. अतिपरवलयिक कक्ष की किसी चाप को निर्मित करने का समय ज्ञात करना।

प्रमाण (Proof)—ध्रुव नाभि पर लेने पर अतिपरवलय का ध्रुवीय समीकरण है—

$$\frac{l}{r}=1+e\cos\theta, (e>1) \quad ...(1)$$

पुन: हम जानते हैं कि

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=h$$

$$\Rightarrow \quad hdt=r^2d\theta$$

समाकलन करने पर,

$$\int_0^t hdt=\int_0^\theta r^2d\theta$$

$$\Rightarrow \quad ht=\int_0^\theta \frac{l^2}{(1+e\cos\theta)^2}d\theta, \quad [\text{समी. (1) से}]$$

$$=l^2\left[\int_0^\theta \frac{e}{e^2-1}d\left(\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right)-\int_0^\theta \frac{1}{e^2-1}\cdot\frac{1}{1+e\cos\theta}d\theta\right]$$

$$\Rightarrow \sqrt{\mu l}\,t=l^2\left[\frac{e}{e^2-1}\cdot\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}-\frac{1}{e^2-1}\int_0^\theta \frac{d\theta}{1+e\cos\theta}\right], \quad [\because h=\sqrt{\mu l}]$$

उदाहरण 7. यदि एक ग्रह को अचानक अपने कक्ष में रोक दिया जाय, माना कि यह वृत्ताकार है। दर्शाइये कि यह

सूर्य पर ग्रह के परिभ्रमण के आवर्तकाल के $\frac{\sqrt{2}}{8}$ समय में गिर जायेगा। **(बिलासपुर 2012;रायपुर 13)**

हल : माना कि वृत्ताकार पथ की त्रिज्या a है। तब आवर्तकाल

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2} \qquad ...(1)$$

जब कण को इसके कक्ष में रोक दिया जाता है, तब इसका वेग घटकर शून्य हो जायेगा तथा यह सूर्य द्वारा आकर्षित होगा। अत: कण एक सरल रेखा में त्वरण के व्युत्क्रम वर्ग नियम के अधीन चलना प्रारंभ कर देगा।

अत: गति का समीकरण है :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{x^2}$$

समाकलन करने पर,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{x} + C_1,$$ जहाँ C_1 समाकलन अचर है।

अब जब $x = a, \frac{dx}{dt} = 0,$ अत: $C_1 = -\frac{2\mu}{a}.$

अत: $$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\mu\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = \sqrt{(2\mu)}\sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)}$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{2\mu}.t = \int_0^a \sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)}\, dx$$

$$= 2a^{3/2}\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta,$$

[$x = a\sin^2\theta$ रखने पर,
$dx = 2a\sin\theta\cos\theta\, d\theta$]

$$= 2a^{3/2}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}a^{3/2}$$

$$\Rightarrow \qquad t = \frac{2\sqrt{2}\pi}{8\sqrt{\mu}}a^{3/2} \qquad ...(2)$$

अत: समी. (1) तथा (2) से,

$$\frac{t}{T} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$ **प्रमाणित।**

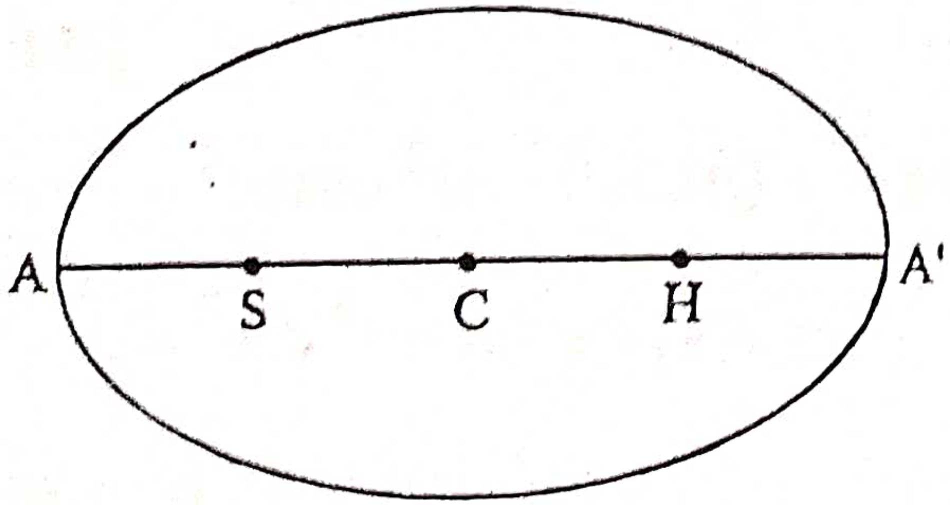
प्रमाणित।

उदाहरण 12. यदि v_1 तथा v_2 ग्रह के रैखिक वेग हैं जबकि यह सूर्य से क्रमशः निकटतम व दूरस्थ हैं, सिद्ध कीजिए कि :

$$(1-e)v_1 = (1+e)v_2.$$

(रायपुर 2005, 10 12; बिलासपुर 08,10;सरगुजा 10)

हल : माना कि सूर्य S पर है जिससे ग्रह की निकटतम स्थिति A पर तथा दूरस्थ स्थिति A' पर हैं।



चित्र

प्रश्नानुसार,

ग्रह का A पर रैखिक वेग $= v_1$

तथा ग्रह का A' पर रैखिक वेग $= v_2$

$$\therefore \quad v_1^2 = \mu\left(\frac{2}{AS} - \frac{1}{a}\right)$$

$$= \mu\left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a}\right),$$

$$[\because AS = CA - SC = a - ae = a(1-e)]$$

$$= \frac{\mu}{a}\frac{1+e}{1-e} \qquad \ldots(1)$$

पुनः $\quad v_2^2 = \mu\left(\frac{2}{SA'} - \frac{1}{a}\right)$

$$= \mu\left(\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a}\right),$$

$$[\because SA' = CA' + SC = a + ae = a(1+e)]$$

$$= \frac{\mu}{a}\frac{1-e}{1+e} \qquad \ldots(2)$$

अतः समी. (1) तथा (2) से,

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{(1+e)^2}{(1-e)^2}$$

$\Rightarrow \quad v_1(1-e) = v_2(1+e).$ प्रमाणित।

अब बल केन्द्र को दूसरी नाभि H पर स्थानान्तरित कर दिया जाता है और स्तब्धिका A पर पिण्ड के वेग में कोई अचानक परिवर्तन नहीं किया जाता है। अत:

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{HA} - \frac{1}{a'}\right),$$

जहाँ $2a'$ नये दीर्घवृत्त का दीर्घाक्ष है।

$$\Rightarrow \quad v^2 = \mu\left[\frac{2}{a+ae} - \frac{1}{a'}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mu(1+e)}{a-ae} = \mu\left[\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a'}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+e}{a(1-e)} = \frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a'} \qquad \ldots(2)$$

चूँकि नये कक्ष की नाभि H का निकटतम स्तब्धिका A' है, अतएव नये कक्ष की उत्केन्द्रता e' तथा दीर्घाक्ष $2a'$ है। अतएव

$$AH = a(1+e) = a'(1-e')$$

$$\Rightarrow \quad a' = \frac{a(1+e)}{1-e'}$$

अत: समी. (2) से,

$$\frac{1+e}{a(1-e)} = \frac{2}{a(1+e)} - \frac{1-e'}{a(1+e)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+e}{(1-e)} = \frac{2}{(1+e)} - \frac{1-e'}{1+e}$$

$$\Rightarrow \quad (1+e)^2 = (1-e)(1+e')$$

$$\Rightarrow \quad 1+e' = \frac{(1+e)^2}{1-e}$$

$$\Rightarrow \quad e' = \frac{(1+e)^2}{1-e} - 1$$

$$\Rightarrow \quad e' = \frac{3e+e^2}{1-e} = \frac{e(3+e)}{1-e}.$$

यही अभीष्ट उत्केन्द्रता है। **प्रमाणित।**

उदाहरण 21. सूर्य की परिक्रमा करने वाले किसी ग्रह का अधिकतम तथा लघुत्तम वेग क्रमश: 30 और 29·2 किमी. प्रति सेकण्ड है। उसकी कक्षा की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

(रायपुर 2009, 11; सरगुजा 12; बस्तर 12)

हल : हम जानते हैं कि

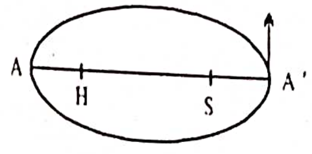
$$v = \frac{h}{p}$$

जहाँ h अचर है, v किसी संकेन्द्री कक्षा में ग्रह का किसी बिन्दु पर वेग है तथा ϕ नाभि से दूरी है ।

अत: ग्रह का अधितम अथवा न्यूनतम मान p के न्यूनतम अथवा अधिकतम परिमाण के होने पर आश्रित होगा।

$\therefore$ समी. (1) से,

$$\frac{h}{SA} = 29\cdot 2$$



तथा $\quad \dfrac{h}{SA'} = 30$

$$\therefore \quad \frac{SA'}{SA} = \frac{29\cdot 2}{30}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a-ae}{a+ae} = \frac{29\cdot 2}{30},$$

जहाँ e कक्षा की उत्केन्द्रता है।

$$\Rightarrow \quad \frac{1-e}{1+e} = \frac{29\cdot 2}{30}$$

$$\Rightarrow \quad 59\cdot 2e = 0\cdot 8$$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{0\cdot 8}{59\cdot 2} = \frac{1}{74}.$$

प्रमाणित।

उदाहरण 22. दीर्घ अक्ष के निकटतम सिरे से प्रारम्भ होकर दीर्घवृत्तीय कक्षा की किसी दी गई चाप को निर्मित करने का समय ज्ञात कीजिए। **(रायपुर 2009)**

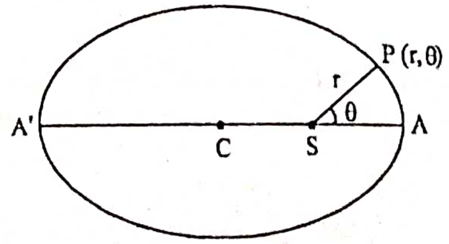
हल : नाभि S को ध्रुव तथा प्रारंभिक रेखा SA के सापेक्ष दीर्घवृत्त का ध्रुवीय समीकरण है—

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta, \quad e < 1 \qquad \ldots(1)$$

हम जानते हैं कि $\quad r^2\dot{\theta} = h$

या $\qquad r^2 d\theta = h\,dt \qquad \ldots(2)$

माना कि शीर्ष A से आरम्भ चाप AP को निर्मित करने का अभीष्ट समय t है।



चित्र

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{vp}{r^2}, \qquad \text{[समी. (3) से]}$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{\omega r^2}{\rho} \qquad \text{...(4)}$$

$\therefore$ अभिलम्ब रेखीय त्वरण

$$= \frac{v^2}{\rho}$$

$$= \frac{\omega^2 r^4}{p^2 \rho^2}.\rho, \qquad \text{[समी. (4) से]}$$

$$= \frac{\omega^2 r^4}{ar.\frac{4r^2p^2}{a^2}}.\rho,$$

[समी. (1) तथा (2) से]

$$= \frac{\omega^2 r^4}{\frac{4r^3}{a}.ar}.\rho, \qquad \text{[समी. (1) से]}$$

$$= \frac{\omega^2}{4}\rho, \text{ जहाँ } \frac{\omega^2}{4} \text{ अचर है।}$$

$\therefore$ अभिलम्ब रेखीय त्वरण $\propto$ वक्रता त्रिज्या। **प्रमाणित।**

उदाहरण 12. एक कण एक समतल वक्र बनाता है। यदि सम्पूर्ण गति काल में स्पर्शरेखीय एवं अभिलम्ब रेखीय त्वरण प्रत्येक अचर हो, तो सिद्ध कीजिए कि समय t में गति के मुड़ने की दिशा का कोण ψ सम्बन्ध $\psi = A\log(Bt+1)$ द्वारा दिया जाता है।

(रायपुर 2004, 07, 10, 12; सरगुजा 12; बिलासपुर 12)

हल : दिया है :

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \text{अचर} = k \text{ (माना)} \qquad \text{...(1)}$$

तथा
$$\frac{v^2}{\rho} = \text{अचर} = \lambda \text{ (माना)} \qquad \text{...(2)}$$

अब समी. (1) से,

$$\frac{ds}{dt} = kt + c, \text{ जहाँ } c \text{ समाकलन अचर है।}$$

...(3)

पुन: समी. (2) से,

$$v^2 = \lambda\rho$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ds}{dt}.\frac{ds}{dt} = \lambda\frac{ds}{d\psi},$$

$$\left[\because v = \frac{ds}{dt} \text{ तथा } \rho = \frac{ds}{d\psi}\right]$$

$$\Rightarrow \quad (kt+c)d\psi = \lambda dt$$

$$\Rightarrow \quad d\psi = \frac{\lambda}{kt+c}dt$$

$\therefore$ समाकलन करने पर,

$$\psi = \left(\frac{\lambda}{k}\right)\log(kt+c) + \log\mu,$$

जहाँ $\log\mu$ समाकलन अचर है।

अब प्रारम्भिक स्थिति में जब $t = 0$ तब $\psi = 0$,

$$\therefore \quad \log\mu = -\left(\frac{\lambda}{k}\right)\log c.$$

$$\therefore \quad \psi = \frac{\lambda}{k}\log\left(\frac{kt+c}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \psi = A\log(Bt+1), \text{ जहाँ } A = \frac{\lambda}{k} \text{ तथा } B = \frac{k}{c}.$$

प्रमाणित।

उदाहरण 13. त्रिज्या a के एक वृत्त के अनुदिश घूमने वाले एक कण का स्पर्श रेखीय त्वरण अभिलम्ब रेखीय त्वरण का λ गुणा है। यदि किसी निश्चित समय पर वेग u है, तो सिद्ध कीजिए कि यह उसी बिन्दु पर $\frac{a}{\lambda u}(1-e^{-2\pi\lambda})$ समय बाद लौटेगा। **(बस्तर 2012)**

हल : दिया है :

स्पर्श रेखीय त्वरण = λ (अभिलम्ब रेखीय त्वरण)

$$\Rightarrow \quad v\frac{dv}{ds} = \lambda\frac{v^2}{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{\lambda ds}{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \lambda d\psi, \qquad \left[\because \rho = \frac{ds}{d\psi}\right]$$

$\therefore$ समाकलन करने पर,

$$\log v = \lambda\psi + \log c, \text{ जहाँ } \log c \text{ समाकलन अचर है।} \qquad \text{...(1)}$$

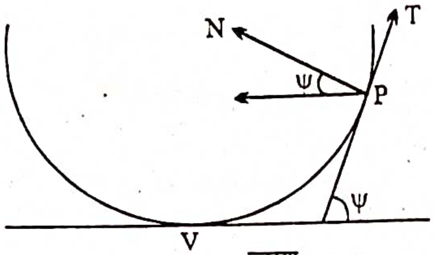
$$\Rightarrow \quad v = ce^{\lambda\psi}$$

उदाहरण 15. एक चक्रज (cycloid) में गतिमान एक कण के त्वरण की दिशा अभिलम्ब के साथ जो कोण बनाती है वह चक्रज पर उसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा और शीर्ष पर खींची गई स्पर्श रेखा के बीच बने कोण के बराबर है तथा उसकी अभिदिशा भी समान है। सिद्ध कीजिए कि उस बिन्दु पर स्पर्श रेखा एकसमान रूप से घूमती है तथा त्वरण का परिमाण एक अचर है। (रायपुर 2013)

हल : माना V चक्रज का शीर्ष है तथा किसी क्षण t पर गतिमान कण P पर है, जहाँ चाप $VP = s$ तथा P पर खींची गयी स्पर्श रेखा, V पर खींची गयी स्पर्श रेखा से कोण ψ बनाती है।

अब चक्रज का समीकरण है :

$$s = 4a \sin\psi, \rho = 4a\cos\psi \qquad \ldots(1)$$



चित्र

PT, P पर स्पर्श रेखा है तथा PN अभिलम्ब है और त्वरण अभिलम्ब के साथ कोण ψ बनाती है। माना कण का त्वरण f है। अतएव त्वरण को स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब की दिशा में वियोजित करने पर,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = v\frac{dv}{ds} = -f\sin\psi \qquad \ldots(2)$$

तथा
$$\frac{v^2}{\rho} = f\cos\psi \qquad \ldots(3)$$

अत: समी. (2) तथा (3) से,

$$v\frac{dv}{ds}\cdot\frac{\rho}{v^2} = -\tan\psi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{v}\frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{d\psi} = -\tan\psi, \qquad \left[\because \rho = \frac{ds}{d\psi}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\tan\psi\, d\psi$$

समाकलन करने पर,

$$\log v = \log\cos\psi + \log c$$

$$\Rightarrow \quad v = c\cos\psi \qquad \ldots(4)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ds}{d\psi}\frac{d\psi}{dt} = c\cos\psi$$

$$\Rightarrow \quad \rho\frac{d\psi}{dt} = c\cos\psi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{c\cos\psi}{\rho} = \frac{c\cos\psi}{4a\cos\psi}, \text{ [समी. (1) से]}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{c}{4a} \qquad \ldots(5)$$

इस समीकरण से स्पष्ट है कि स्पर्श रेखा एकसमान दर से घूमती है। पुन: समी. (4) से,

$$\frac{ds}{dt} = c\cos\psi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -c\sin\psi\frac{d\psi}{dt} = -\frac{c^2}{4a}\sin\psi,$$

[समी. (5) से]

तथा
$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{c^2\cos^2\psi}{4a\cos\psi} = \frac{c^2}{4a}\cos\psi$$

अत: परिणामी त्वरण

$$= \sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

$$= \frac{c^2}{4a}\sqrt{\sin^2\psi + \cos^2\psi}$$

$$= \frac{c^2}{4a}, \text{ एक अचर।}$$

प्रमाणित।

उदाहरण 16. एक अचर वेग v से r त्रिज्या वाले वृत्त के ऊपर भ्रमण करता है तो दिखाइये कि पथ के किसी बिन्दु पर त्वरण $= \frac{v^2}{r}$ तथा वृत्त के केन्द्र की तरफ है।

हल : यहाँ $v = k$ (अचर) माना।

तब स्पर्श रेखीय त्वरण $= \frac{dv}{dt} = 0$

तथा अभिलम्ब रेखीय त्वरण $= \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{r}$,

[$\because$ वृत्त में $\rho = r$]

अत: पथ के किसी बिन्दु पर त्वरण

$$= \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

$$= \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{r}.$$

जो वृत्त के केन्द्र की तरफ होगी क्योंकि यह अभिलम्ब रेखीय त्वरण के बराबर है। प्रमाणित

तथा अभिलम्बीय त्वरण

$$=\frac{v^2}{\rho}=\frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho}=\frac{16a^2\omega^2\cos^2\psi}{4a\cos\psi},$$

$$\left[\rho=\frac{ds}{d\psi}=4a\cos\psi\right]$$

$$=4a\omega^2\cos\psi$$

अत: परिणामी त्वरण

$$=\left[\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=[16a^2\omega^4\sin^2\psi+16a^2\omega^4\cos^2\psi]^{1/2}$$

$$=4a\omega^2 = \text{स्थिरांक।}$$ **प्रमाणित।**

उदाहरण 20. समरूप वेग v से एक कण एक वक्र (जिसके लिए s तथा ψ साथ-साथ शून्य होता है) बनाता है। यदि किसी बिन्दु s पर त्वरण $\frac{v^2c}{s^2+c^2}$ हो, तो वक्र का नैज समीकरण ज्ञात कीजिए। (बिलासपुर 2009; रायपुर 07,11)

हल : दिया है कि वेग v समरूप है। अतएव

$$\frac{ds}{dt}=v \text{ (अचर)}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2s}{dt^2}=0$$

$$\therefore \quad \text{परिणामी त्वरण} =\sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v^2c}{s^2+c^2}=\frac{v^2}{\rho}, \qquad \left[\because \frac{d^2s}{dt^2}=0\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c}{s^2+c^2}\rho=1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ds}{s^2+c^2}=\frac{1}{c}d\psi, \qquad \left[\because \rho=\frac{ds}{d\psi}\right]$$

$\therefore$ समाकलन करने पर,

$$\frac{1}{c}\tan^{-1}\left(\frac{s}{c}\right)=\frac{1}{c}\psi+A, \text{ जहाँ } A \text{ समाकलन अचर है।}$$

प्रारम्भिक स्थिति में जब $s=0$ तब $\psi=0$. अतएव $A=0$.

$$\therefore \quad \frac{1}{c}\tan^{-1}\left(\frac{s}{c}\right)=\frac{1}{c}\psi$$

$$\Rightarrow \quad s=c\tan\psi$$

यही अभीष्ट नैज समीकरण है। उत्तर

उदाहरण 21. समरूप वेग से एक बिन्दु चक्रज $s=4a\sin\psi$ बनाता है। किसी बिन्दु पर v, a तथा s के पदों में इसका त्वरण ज्ञात कीजिए। (बिलासपुर 2011,13)

हल : चक्रज का समीकरण है :

$$s=4a\sin\psi \qquad ...(1)$$

पुन: दिया है कि वेग समरूप है। अत:

$$\frac{ds}{dt}=v= \text{ अचर}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2s}{dt^2}=0$$

अर्थात् स्पर्श रेखीय त्वरण = 0.

पुन: समी. (1) का ψ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\rho=\frac{ds}{d\psi}=4a\cos\psi$$

$$\therefore \quad \text{परिणामी त्वरण} =\sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

$$=\sqrt{0+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

$$=\frac{v^2}{\rho}$$

$$=\frac{v^2}{4a\cos\psi}$$

$$=\frac{v^2}{4a\sqrt{1-\sin^2\psi}}$$

$$=\frac{v^2}{4a\sqrt{1-\frac{s^2}{16a^2}}}, \text{ [समी. (1) से]}$$

$$=\frac{v^2}{\sqrt{16a^2-s^2}}.$$ उत्तर

उदाहरण 22. एक बिन्दु एक वक्र में इस प्रकार घूमता है कि इसके स्पर्श रेखीय एवं अभिलम्ब रेखीय त्वरण बराबर हैं तथा स्पर्श रेखा अचर कोणीय वेग के साथ घूमता है। पथ ज्ञात कीजिए। (बिलासपुर 2009, 10)

हल : दिया है :

स्पर्श रेखीय त्वरण = अभिलम्ब रेखीय त्वरण

$$\therefore \quad v\frac{dv}{ds}=\frac{v^2}{\rho} \qquad ...(1)$$

तथा स्पर्श रेखा का कोणीय वेग = अचर

$$\therefore \quad \frac{d\psi}{dt}=\omega \text{ (माना)} \qquad ...(2)$$

अब समी. (1) से,

$$\frac{dv}{ds}=\frac{v}{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{ds}=v\frac{d\psi}{ds}, \qquad \left[\because \rho=\frac{ds}{d\psi}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{v}=d\psi$$

$\therefore$ समाकलन करने पर,

$\log v=\psi+\log c$, जहाँ $\log c$ समाकलन अचर है।

$$\Rightarrow \quad v=ce^{\psi}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ds}{dt}=ce^{\psi}, \qquad \left[\because v=\frac{ds}{dt}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ds}{d\psi}\cdot\frac{d\psi}{dt}=ce^{\psi}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ds}{d\psi}\cdot\omega=ce^{\psi},$$

$$\Rightarrow \quad ds=\left(\frac{c}{\omega}\right)e^{\psi}d\psi$$

$\therefore$ समाकलन करने पर,

$$s=\left(\frac{c}{\omega}\right)e^{\psi}+k, \text{जहाँ } k \text{ समाकलन अचर है।}$$

यही अभीष्ट पथ का समीकरण है। उत्तर

उदाहरण 23. एक बिन्दु एक समतल वक्र में इस प्रकार गति करता है कि उसका स्पर्श रेखीय त्वरण अचर रहता है तथा उसकी स्पर्श रेखीय वेग तथा अभिलम्ब रेखीय त्वरण का अनुपात स्थिर रहता है। सिद्ध कीजिए कि पथ का नैज समीकरण $s=A\psi^2+B\psi+C$ होगा। (बिलासपुर 2011; रायपुर 10)

हल : प्रश्नानुसार,

स्पर्श रेखीय त्वरण = अचर

$$\therefore \quad v\frac{dv}{ds}=\lambda \text{ (माना)} \qquad ...(1)$$

तथा $\frac{\text{स्पर्श रेखीय वेग}}{\text{अभिलम्ब रेखीय त्वरण}}$ = अचर

$$\therefore \quad \frac{v}{v^2/\rho}=\mu \text{ (माना)}$$

$$\Rightarrow \quad \mu v=\rho \qquad ...(2)$$

अब समी. (1) का समाकलन करने पर,

$v^2=2\lambda s+c$, जहाँ c समाकलन अचर है।

$$\Rightarrow \quad v=\sqrt{2\lambda s+c} \qquad ...(3)$$

अत: समी. (2) तथा (3) से,

$$\mu\sqrt{2\lambda s+c}=\frac{ds}{d\psi} \qquad \left[\because \rho=\frac{ds}{d\psi}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{2\lambda ds}{\sqrt{2\lambda s+c}}=\lambda\mu d\psi$$

अत: समाकलन करने पर,

$\sqrt{2\lambda s+c}=\lambda\mu\psi+k$, जहाँ K समाकलन अचर है।

$$\Rightarrow \quad 2\lambda s+c=(\lambda\mu\psi+k)^2=\lambda^2\mu^2\psi^2+2\lambda\mu k\psi+k^2$$

$$\Rightarrow \quad s=\frac{\lambda\mu^2}{2}\psi^2+\mu k\psi+\frac{k^2c}{2\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad s=A\psi^2+B\psi+c,$$

जहाँ $A=\frac{\lambda\mu^2}{2}, B=\mu k$ तथा $c=\frac{k^2c}{2\lambda}$.

यही अभीष्ट नैज समीकरण है। **प्रमाणित**

प्रश्नावली 12·1

1. एक कण अचर वेग v से r त्रिज्या वाले वृत्त के ऊपर भ्रमण करता है, तो दिखाइये कि पथ के किसी बिन्दु पर त्वरण $=\frac{v^2}{r}$ तथा वृत्त के केन्द्र की तरफ है।
2. सिद्ध कीजिए कि समरूप वेग से एक वक्र में घूमते हुए कण का त्वरण $\rho\psi^2$ है।
3. एक कण समरूप वेग के साथ एक चक्रज बनाता है। सिद्ध कीजिए कि किसी बिन्दु पर अभिलम्ब रेखीय त्वरण उस बिन्दु की चक्रज के आधार से दूरी के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती है।

अब समी. (3) से,

$$mv\frac{dv}{ds} = -mg\frac{dy}{ds}, \qquad \left[\because \sin\psi = \frac{dy}{ds}\right]$$

समाकलन करने पर,

$$\frac{1}{2}mv^2 = -mgy + C \qquad ...(5)$$

जहाँ C समाकलन अचर है।

यदि कण को प्रारम्भिक वेग u से उस बिन्दु से फेंका गया हो, जहाँ $y = y_1$ तब

$$\frac{1}{2}mu^2 = -mgy_1 + C \qquad ...(6)$$

अतएव समी. (5) तथा (6) से,

$$\frac{1}{2}m(v^2 - u^2) = -mg(y - y_1) = -mgh \qquad ...(7)$$

जहाँ h बिन्दु P की प्रक्षेप बिन्दु से ऊँचाई है।

वास्तव में समी. (7) एक ऊर्जा समीकरण है जो ऊर्जा के सिद्धान्त से प्राप्त होता है अर्थात् गतिज ऊर्जा में परिवर्तन किये गये कार्य के बराबर होता है।

पुनः समी. (7) से हम पाते हैं कि,

$$v^2 = u^2 - 2gh, \text{ ऊपर की ओर प्रक्षेप होने पर,}$$

तथा $$v^2 = u^2 + 2gh, \text{ नीचे की ओर प्रक्षेप होने पर,}$$

जहाँ h दोनों बिन्दुओं के बीच की उदग्र दूरी है।

यदि हमें वक्र का नैज समीकरण ज्ञात हो, तो समाकलन कर किसी बिन्दु पर हम वेग ज्ञात कर सकते हैं। पुनः वेग के इस मान को समी. (4) में रखकर R का निर्धारण किया जा सकता है।

यह ज्ञात रहे कि कण वक्र को छोड़ देगा जब $R = 0$ और चिन्ह परिवर्तित हो जाता है।

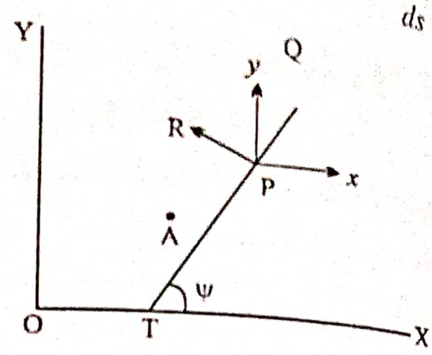
13·2·1. ऊर्जा संरक्षण का सिद्धांत (Principle of Conservation of Energy) (बिलासपुर 2010; रायपुर 10)

प्रमेय 2. जब एक कण संरक्षित बलों के निकाय की क्रिया के अन्तर्गत घूमता है, तब इसके गतिज एवं स्थितिज ऊर्जाओं का योग सम्पूर्ण गतिकाल में अचर रहता है।

(रायपुर 2005)

प्रमाण (Proof)—माना द्रव्यमान m का एक कण संरक्षित बलों के निकाय की क्रिया के अन्तर्गत एक वक्र पर घूमते हुए समय t पर बिन्दु P पर है जहाँ P की वक्र पर के एक नियत बिन्दु A से चापीय दूरी s है तथा माना कि P पर वेग v है। माना x तथा y अक्षों OX एवं OY के समान्तर P पर लगने वाले बलों के घटक हैं। माना P पर स्पर्श रेखा PT अक्ष OX के साथ ψ कोण ब है। तब, TP के अनुदिश गति का समीकरण है—

$$mv\frac{dv}{ds} = X\cos\psi + Y\sin\psi = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds}$$



चित्र

अतः समाकलन करने पर,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int (Xdx + Ydy) \qquad ...(1)$$

अब यदि $Xdx + Ydy = d\phi$ हो, जहाँ $X = \frac{d\phi}{dx}, Y = \frac{d\phi}{dy}$

तथा $\phi = \phi(x, y)$,

तब $$\frac{1}{2}mv^2 = \phi(x, y) + C \qquad ...(2)$$

पुनः कण की बिन्दु P पर स्थितिज ऊर्जा

= कण को बिन्दु P से मानक स्थिति तक ले जाने में बलों द्वारा किया गया कार्य

$= \int_{(x,y)}^{(x_1,y_1)} (Xdx + Ydy)$, जहाँ (x_1, y_1) मानक स्थिति में बिन्दु के नियामकों को व्यक्त करता है।

$$= \int_{(x,y)}^{(x_1,y_1)} \left(\frac{d\phi}{dx}dx + \frac{d\phi}{dy}dy\right) = [\phi(x, y)]_{(x,y)}^{(x_1,y_1)}$$

$$= \phi(x_1, y_1) - \phi(x, y) \qquad ...(3)$$

अतः समी. (2) तथा (3) से,

गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा $= C + \phi(x_1, y_1) =$ एक अचर। प्रमाणित।

रिमार्क (Remark)—जब केवल गुरुत्व बल लग रहा हो, तो $X = 0$ तथा $Y = -mg$

अतः उस स्थिति में समी. (1) से,

$$\frac{1}{2}mv^2 = -mgy + C$$

जिससे दूरी s तय करने में कण द्वारा लगा समय प्राप्त होता है।

पुनः समी. (5) से v^2 का मान समी. (2) में रखने पर हम पाते हैं कि,

$$R = m\left[g\cos\psi - \frac{gs^2}{4a\rho}\right]$$

$$= mg\left[\cos\psi - \frac{16a^2\sin^2\psi}{4a(4a\cos\psi)}\right],$$

$$\left[\because \rho = \frac{ds}{d\psi} = 4a\cos\psi, \text{ समी. (3) से}\right]$$

$$= mg\left[\cos\psi - \frac{\sin^2\psi}{\cos\psi}\right]$$

अब कण चक्रज को छोड़ देगा, जब $R = 0$ अर्थात् जब

$$\cos\psi - \frac{\sin^2\psi}{\cos\psi} = 0$$

अर्थात् $\cos^2\psi - \sin^2\psi = 0$

अर्थात् $\cos 2\psi = 0$

अर्थात् $\psi = \frac{\pi}{4}$

अतः कण जब क्षैतिज से $\pi/4$ कोण बनाते हुए गति में होगा तो चक्रज को छोड़ देगा।

चक्रज छोड़ने के बाद कण एक परवलयिक पथ बनाता है। जहाँ पर यह वक्र को छोड़ता है वहाँ पर वेग कण का प्रक्षेप वेग है तथा प्रक्षेप कोण वह कोण है जो उस बिन्दु पर की स्पर्श रेखा अनुवर्ती परवलय के शीर्ष पर की स्पर्श रेखा के साथ बनाती है।

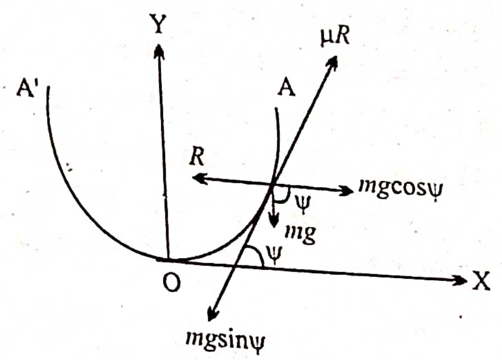
प्रमेय 6. एक कण रूक्ष (rough) चक्रज पर नीचे की ओर खिसकता है, घर्षण गुणांक μ है, गति ज्ञात कीजिए।

(रायपुर 2010; बिलासपुर 12)

अथवा

एक रूक्ष (rough) चक्रज (cycloid) का आधार क्षैतिज है और शीर्ष नीचे की ओर है। इस पर एक मनके (bead) के सरकने की गति की व्याख्या कीजिए? (सरगुजा 2011)

प्रमाण (proof)— माना कि जब कण नीचे की ओर चक्रज पर फिसल रहा है, किसी क्षण यह बिन्दु P पर है, जहाँ कण का वेग v है तथा चाप $OP = s$ है। अब चूँकि कण नीचे की ओर फिसल रहा है, अतएव घर्षण बल ऊपर की ओर क्रिया करेगा।



चित्र

अतः गति के समीकरण होंगे :

$$mv\frac{dv}{ds} = \mu R - mg\sin\psi \quad ...(1)$$

तथा $$\frac{mv^2}{\rho} = R - mg\cos\psi \quad ...(2)$$

समी. (2) को μ से गुणा कर समी. (1) से घटाने पर,

$$mv\frac{dv}{ds} - \frac{mv^2}{\rho}\mu = mg(\mu\cos\psi - \sin\psi)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds} - \frac{\mu v^2}{\rho} = g(\mu\cos\psi - \sin\psi)$$

$$\Rightarrow \frac{dv^2}{d\psi}\frac{d\psi}{ds} - \frac{2\mu v^2}{\rho} = 2g(\mu\cos\psi - \sin\psi)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv^2}{d\psi} - 2\mu v^2 = 2\rho g(\mu\cos\psi - \sin\psi),$$

$$\left[\because \rho = \frac{ds}{d\psi}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dv^2}{d\psi} - 2\mu v^2 = 8ag\cos\psi(\mu\cos\psi - \sin\psi) \quad ...(3)$$

$$[\because \rho = 4a\cos\psi]$$

अतः v^2 में एक रैखिक अवकल समीकरण है, जिसका

$$\text{I.F.} = e^{\int -2\mu d\psi} = e^{-2\mu\psi}$$

अतः समी. (3) का हल है :

$$v^2 e^{-2\mu\psi} = C + 8ag\int e^{-2\mu\psi}\cos\psi$$

$$(\mu\cos\psi - \sin\psi)d\psi \quad ...(4)$$

$$v = e^{-\mu\psi} + C \quad ...(3)$$

[जहाँ C समाकलन अचर है।]

यहाँ समी. (3) से किसी बिन्दु पर वेग प्राप्त होता है।

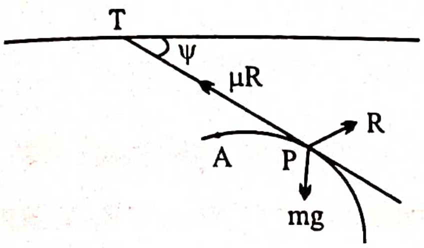
पुनः समी. (2) एवं (3) की सहायता से R का मान ज्ञात किया जा सकता है।

प्रमेय 2. गुरुत्व के अधीन एक दिये हुए खुरदरे समतल वक्र पर कोई कण घूमता है, गति का निर्धारण कीजिए।

अथवा

एक कण ऊर्ध्वाधरतः समतल में एक दिए हुए रुक्ष वक्र पर गुरुत्व के अन्तर्गत नीचे की ओर फिसलता है। गति की व्याख्या कीजिए। (बिलासपुर 2005, 08; रायपुर 09)

प्रमाण (Proof) —माना कि किसी समय t पर कण बिन्दु P पर है जहाँ चाप $AP = s$ तथा स्पर्श रेखा PT क्षैतिज के साथ कोण ψ बनाती है। यहाँ A कण का प्रारम्भिक बिन्दु है। तब, गति के समीकरण होंगे :



चित्र

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg\sin\psi - \mu R \quad ...(1)$$

तथा
$$\frac{mv^2}{\rho} = mg\cos\psi - R \quad ...(2)$$

समी. (1) तथा (2) से R का विलोपन करने पर हम पाते हैं कि

$$v\frac{dv}{ds} - \mu\frac{v^2}{\rho} = g(\sin\psi - \mu\cos\psi)$$

$$\Rightarrow \quad v\frac{dv}{ds}\rho - \mu v^2 = g\rho(\sin\psi - \mu\cos\psi)$$

$$\Rightarrow \quad 2v\frac{dv}{d\psi} - 2\mu v^2 = 2\rho g(\sin\psi - \mu\cos\psi) \quad ...(3)$$

यह v^2 एवं ψ में एक रैखिक अवकल समीकरण है जिसका

$$I.F. = e^{\int -2\mu d\psi} = e^{-2\mu\psi}$$

अतः अवकल समी. (2) का पूर्ण हल है :

$$v^2 \cdot e^{-2\mu\psi} = 2g\int \rho e^{-2\mu\psi}$$
$$(\sin\psi - \mu\cos\psi)d\psi + \text{अचर} \quad ...(4)$$

इस प्रकार यदि वक्र का नैज समीकरण ज्ञात हो, तो समी. (4) से वक्र के किसी बिन्दु पर वेग ज्ञात किया जा सकता है।

निदर्शी उदाहरण (Illustrative Examples)

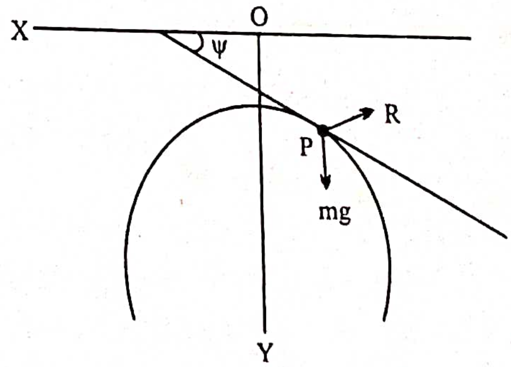
उदाहरण 1. एक कण एक कैटेनरी पर नीचे की ओर फिसलता है, जिसका तल उदग्र है तथा शीर्ष ऊपर की ओर है, किसी बिन्दु पर वेग इसके नियता से गिरने के कारण है। सिद्ध कीजिए कि किसी बिन्दु पर दबाव उस बिन्दु की नियता से दूरी के व्युत्क्रमानुपाती है।

हल : कैटेनरी का नैज समीकरण है :

$$s = c\tan\psi \quad ...(1)$$

अतः कैटेनरी के किसी बिन्दु P पर वक्रता त्रिज्या,

$$\rho = \frac{dx}{d\psi} = c\sec^2\psi \quad ...(2)$$



चित्र

पुनः कैटेनरी का समीकरण निम्न रूप में भी होता है :

$$y = c\sec\psi \quad ...(3)$$

कैटेनरी के किसी बिन्दु P पर कण का वेग यदि v हो, तो

$$v^2 = 2gy \quad ...(4)$$

जहाँ y बिन्दु P की कोटि (ordinate) है।

पुनः
$$\frac{mv^2}{\rho} = mg\cos\psi - R$$

$$\therefore \quad R = mg\cos\psi - \frac{mv^2}{\rho}$$

$$= \frac{mgc}{y} - \frac{m.2gy}{(y^2/c)},$$

[समी. (2), (3) तथा (4) से]

$$= \frac{mgc}{y} - \frac{2mgc}{y}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a}{\mu c}\right)} \log \cot \frac{\pi}{8}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a}{\mu c}\right)} \log \left[\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a}{\mu c}\right)} \log \left[\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

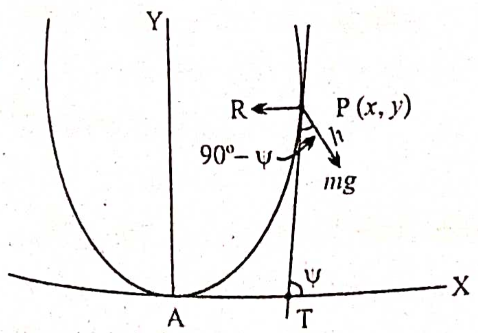
$$= \sqrt{\left(\frac{a}{\mu c}\right)} \log (\sqrt{2}+1).$$ प्रमाणित।

उदाहरण 7. एक चिकनी परवलीय नलिका, जिसका शीर्ष नीचे की ओर है, ऊर्ध्वाधर तल में स्थिर रख दी गई है, में एक कण गुरुत्व के प्रभाव के अन्तर्गत विराम से नीचे की ओर खिसकता है। सिद्ध कीजिए कि किसी भी स्थिति में नलिका की प्रतिक्रिया $2\omega \frac{h+a}{\rho}$ है, जहाँ ω कण का भार, ρ वक्रता त्रिज्या, $4a$ नाभिलम्ब तथा h कण की शीर्ष के ऊपर प्रारम्भिक ऊर्ध्वाधर ऊँचाई है। (रायपुर 2013)

हल : परवलय का शीर्ष नीचे की ओर है, अतएव इसका समीकरण होगा :

$$x^2 = 4ay \qquad ...(1)$$

माना किसी समय t पर कण बिन्दु $P(x, y)$ पर है। तब, गति के समीकरण होंगे :



चित्र

$$mv\frac{dv}{ds} = -mg\cos(90° - \psi)$$

$$\Rightarrow \quad v\frac{dv}{ds} = -g\sin\psi$$

$$\Rightarrow \quad v\frac{dv}{ds} = -g\frac{dy}{ds}, \qquad \left[\because \sin\psi = \frac{dy}{ds}\right]$$

$$\Rightarrow \quad vdv = -gdy \qquad ...(2)$$

तथा $$\frac{mv^2}{\rho} = R - mg\cos\psi \qquad ...(3)$$

समी. (2) का समाकलन करने पर,

$$v^2 = -2gy + C$$

प्रारम्भिक स्थिति में जब $y = h$, तब $v = 0$, $\therefore C = 2gh$.

$$\therefore \quad v^2 = 2g(h-y) \qquad ...(4)$$

अब समी. (3) से,

$$R = \frac{mv^2}{\rho} + mg\cos\psi$$

$$= \frac{m2g(h-y)}{\rho} + mg\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\psi}}$$

$$= \frac{2mg(h-y)}{\rho} + mg \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$= \frac{2mg}{\rho}\left[(h-y) + \frac{\rho}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{y}{a}}}\right],$$

[समी. (1) से]

$$= \frac{2mg}{\rho}\left[h - y + \frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{2\frac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{y}{a}}}\right]$$

$$= \frac{2mg}{\rho}\left[h - y + \frac{\left\{1+\frac{y}{a}\right\}^{3/2}}{2\cdot\frac{1}{2a}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{y}{a}\right)^{1/2}}\right],$$

[समी. (1) से]

$$= \frac{2mg}{\rho}[h - y + a + y]$$

$$= \frac{2\omega}{\rho}(h + a),$$

जहाँ $\omega = mg$, कण का भार है। **प्रमाणित।**

$$\therefore \frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{g}{4a}}\left[-A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{4a}}t\right)+B\cos\left(\sqrt{\frac{g}{4a}}t\right)\right] \quad ...(5)$$

प्रारम्भिक प्रतिबन्धों से जब $t=0, s=4a$ तथा $\frac{ds}{dt}=-v$

अतः समी. (4) तथा (5) से,

$A=4a$ तथा $B=-v$

अतः समी. (4) में A तथा B का मान रखने पर,

$$s=4a\cos\left(\sqrt{\frac{g}{4a}}t\right)-v\sqrt{\frac{4a}{g}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{4a}}t\right)$$

शीर्ष पर $s=0$,

$$\therefore \tan\left(\sqrt{\frac{g}{4a}}t\right)=\frac{\sqrt{(4ag)}}{v}$$

$$\therefore t=2\sqrt{\frac{a}{g}}\tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{(4ag)}}{v}\right\}.$$ **प्रमाणित।**

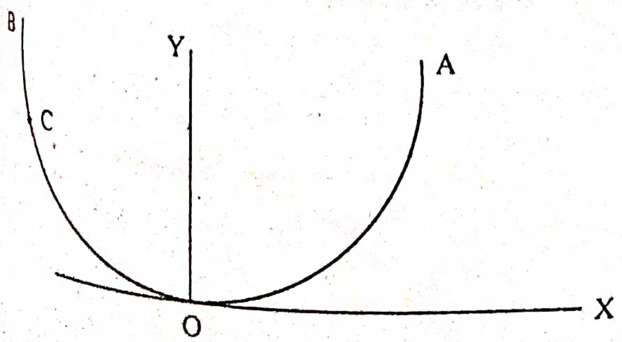
उदाहरण 11. t समय के अन्तराल पर दो कण एक चक्रज के कस्प से वक्र के अनुदिश नीचे की ओर गिराया जाता है। सिद्ध कीजिए कि वे $2\pi\sqrt{(a/g)}+\frac{1}{2}t$ समय बाद मिलेंगे।

(रायपुर 2012)

हल : चक्रज का समीकरण है :

$$s=4a\sin\psi \quad ...(1)$$

माना कि दोनों कण बिन्दु C पर मिलते हैं। पहला कण चाप AOB तय करता है और तब BC तथा दूसरा कण चाप AOC तय करता है। माना कि $OC=s_1$.



चित्र

तब गति का समीकरण है:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{g}{4a}s \quad ...(2)$$

इस अवकल समीकरण का व्यापक हल है:

$$s=A\cos\left(\sqrt{\left(\frac{g}{4a}\right)}t\right)+B\sin\left(\sqrt{\left(\frac{g}{4a}\right)}t\right), \quad ...(3)$$

जहाँ A तथा B समाकलन अचर हैं।

$$\therefore \frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{g}{4a}\right)}\left[-A\sin\left(\sqrt{\left(\frac{g}{4a}\right)}t\right)+B\cos\left(\sqrt{\left(\frac{g}{4a}\right)}t\right)\right] \quad ...(4)$$

प्रारम्भिक प्रतिबन्धों से,

$$s=4a, \frac{ds}{dt}=0, \text{ जब } t=0.$$

$$\therefore \quad A=4a \text{ तथा } B=0$$

अतः समी. (3) में A तथा B के इन मानों को रखने पर,

$$s=4a\cos\left(\sqrt{\left(\frac{g}{4a}\right)}t\right)$$

या
$$t=\sqrt{\left(\frac{4a}{g}\right)}\cos^{-1}\left(\frac{s}{4a}\right) \quad ...(5)$$

अब प्रथम कण चाप AOB समय $2\pi\sqrt{(a/g)}$ में तय करता है और तब चाप BC समय t_1 (माना) में। तब समी. (5) से $s=-s_1$ जब $t=t_1$ लेने पर,

$$t_1=2\sqrt{\left(\frac{a}{g}\right)}\cos^{-1}\left(\frac{s_1}{4a}\right) \quad ...(6)$$

B को प्रारम्भिक स्थिति में लेने पर।

दूसरा कण माना t_2 समय में चाप AOC तय करता है। तब, समी. (5) से $s=s_1$ जब $t=t_2$ लेने पर,

$$t_2=2\sqrt{\left(\frac{a}{g}\right)}\cos^{-1}\left(-\frac{s_1}{4a}\right) \quad ...(7)$$

A को प्रारम्भिक स्थिति में लेने पर।

परन्तु $2\pi\sqrt{\left(\frac{a}{g}\right)}+t_1=t+t_2$

$$\Rightarrow 2\pi\sqrt{\left(\frac{a}{g}\right)}+2\sqrt{\left(\frac{a}{g}\right)}\cos^{-1}\left(\frac{s_1}{4a}\right)=t+2\sqrt{\left(\frac{a}{g}\right)}\left\{\pi-\cos^{-1}\left(\frac{s_1}{4a}\right)\right\},$$

[समी. (6) तथा (7) से]

$$\Rightarrow \frac{1}{2}t=2\sqrt{\left(\frac{a}{g}\right)}\cos^{-1}\left(\frac{s_1}{4a}\right)=t_1$$

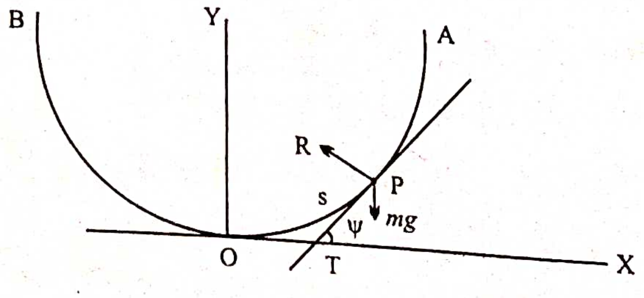
अत: अभीष्ट समय $=2\pi\sqrt{\left(\frac{a}{g}\right)}+\frac{1}{2}t.$ **प्रमाणित।**

उदाहरण 12. एक कण अपने स्वयं के भार के अधीन एक चक्रज के कस्प से नीचे की ओर गिरता है। दर्शाइये कि जब यह शीर्ष पर पहुँचता है तो वक्र पर दबाव कण के भार का दुगुना होता है। (रायपुर 2005, 12)

हल : चक्रज का समीकरण है :

$$s=4a\sin\psi \qquad ...(1)$$

माना कि t समय बाद कण बिन्दु P पर है जहाँ कण का वेग v तथा प्रतिक्रिया R है। माना कि P के नैज नियामक (s,ψ) हैं। तब, गति के समीकरण होंगे :



चित्र

$$v\frac{dv}{ds}=-g\sin\psi=-\frac{g}{4a}s \text{ [समी. (1) से]} \qquad ...(2)$$

तथा $$\frac{mv^2}{\rho}=R-mg\cos\psi \qquad ...(3)$$

समीकरण (2) का समाकलन करने पर,

$$v^2=-\frac{g}{4a}s^2+C,$$

[जहाँ C समाकलन अचर है]

प्रारम्भिक स्थिति में, $v=0$ जब $s=4a$, $\therefore C=4ag$

$$\therefore \qquad v^2=\frac{g}{4a}(16a^2-s^2)$$

शीर्ष O पर, $s=0$, अतएव $v^2=4ag$

इसका उपयोग समी. (3) में करने पर, बिन्दु O पर दबाव

$$R=m\cdot\frac{4ag}{4a}+mg,$$

[$\because \rho=4a$ जहाँ $\psi=0$]

$$=2mg$$

$=2\times$ कण का भार। **प्रमाणित।**

उदाहरण 13. एक कण को एक चिकने चक्रज के शीर्ष के बिल्कुल नजदीक रखा जाता है, अक्ष उदग्र है तथा शीर्ष ऊपर की ओर है। ज्ञात कीजिए कि कहाँ पर कण वक्र से अलग हो जायेगा।

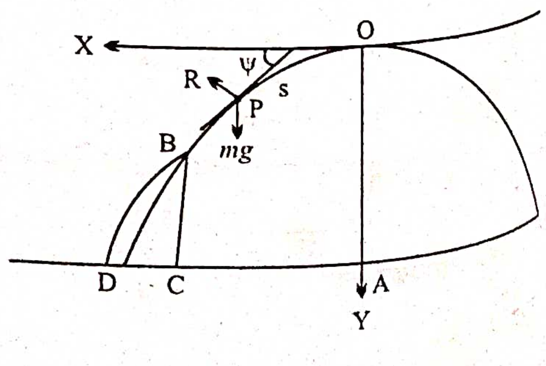
सिद्ध कीजिए कि यह चक्रज के आधार पर आधार के वक्र से $a\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}\right)$ दूरी पर गिरता है, जहाँ a जनक वृत्त की त्रिज्या है।

हल : चक्रज का समीकरण है :

$$s=4a\sin\psi \qquad ...(1)$$

पुन: चक्रज के लिए हम जानते हैं कि

$$s^2=8ay \qquad ...(2)$$



चित्र

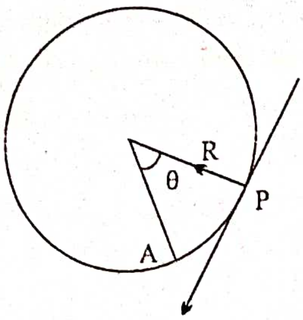
अतः $R = 2mg$. प्रमाणित।

उदाहरण 21. एक कण जिस पर कोई बल क्रिया नहीं कर रहा है, रूक्ष गोले के आन्तरिक पृष्ठ के अनुदिश प्रक्षेपित किया जाता है। दर्शाइए कि यह $\frac{a}{\mu V}\left(e^{2\pi\mu}-1\right)$ समय पश्चात् प्रक्षेप बिन्दु पर वापस लौट आयेगा, जहाँ a गोले की त्रिज्या, प्रक्षेप वेग V तथा घर्षण गुणांक μ है।

(रायपुर 2004, 11)

हल : मान लो किसी क्षण कण बिन्दु P पर है जहाँ इसका वेग v तथा प्रक्षेप बिन्दु A से चापीय दूरी s है।

बिन्दु P पर स्पर्शी व अभिलम्ब के अनुदिश गति के समीकरण हैं—



$$mv\frac{dv}{ds} = -\mu R \qquad ...(1)$$

तथा
$$\frac{mv^2}{\rho} = R \qquad ...(2)$$

समी. (1) व (2) से R को विलुप्त करने पर,

$$mv\frac{dv}{ds} + m\mu\frac{v^2}{\rho} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(v^2) + \mu\frac{v^2}{\rho} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d(v^2)}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} + \frac{2\mu v^2}{\rho} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a}\frac{dv^2}{d\theta} + \frac{2\mu v^2}{a} = 0,$$

$$\left[\because s = a\theta, \frac{ds}{d\theta} = a \text{ तथा } \rho = a\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{d\theta}(v^2) + 2\mu v^2 = 0 \qquad ...(3)$$

समी. (3) v^2 में रैखिक अवकल समीकरण है। अत:

$$\text{I.F.} = e^{2\mu\theta}$$

$\therefore$ समी. (3) का सामान्य हल होगा—

$$v^2 e^{2\mu\theta} = c \text{ जहाँ } c \text{ समाकलन नियतांक है।}$$

अब, जब $\theta = 0, v = V \quad \therefore \; c = V^2$

$$\therefore \quad v^2 e^{2\mu\theta} = V^2$$

या
$$ve^{\mu\theta} = V$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ds}{dt}e^{\mu\theta} = V$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ds}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}e^{\mu\theta} = V$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ae^{\mu\theta}}{V}\frac{d\theta}{dt} = 1$$

$$\Rightarrow \quad dt = \frac{a}{V}e^{\mu\theta}\,d\theta$$

मान लो T समय में कण वापिस प्रक्षेप बिन्दु A पर पहुँचता है, अर्थात् $\theta = 0$ से $\theta = 2\pi$ तक का समय T है—

$$\therefore \quad \int_0^T dt = \frac{a}{V}\int_0^{2\pi} e^{\mu\theta}d\theta$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{a}{\mu V}\left[e^{\mu\theta}\right]_0^{2\pi}$$

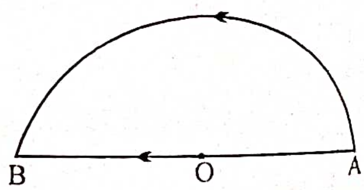
$$\Rightarrow \quad T = \frac{a}{\mu V}(e^{2\pi\mu} - 1).$$

प्रमाणित।

प्रश्न 22. एक कण किसी वृत्त के व्यास AB पर एकसमान गति से चलता है तथा दूसरा कण वृत्त की अर्धपरिधि AB पर प्रारंभिक वेग शून्य तथा अचर स्पर्शी त्वरण से चलना प्रारम्भ करता है। यदि दोनों A से चलकर B पर एक साथ पहुँचते है,तो सिद्ध कीजिए कि उनके वेग $\pi : 1$ में होंगे।

(सरगुजा 2012)

हल : कण जब वृत्त के व्यास AB पर एकसमान गति से चलता है, तब B पर उस कण का वेग



$$v_1 = \frac{d(AB)}{dt} \text{ (अचर)}$$

पुन: पथ के बिन्दु B पर

$$\text{परिणामी त्वरण} = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{r} = \frac{\pi}{AB}\left(\frac{d(AB)}{dt}\right)^2$$

अत: दूसरे कण का B पर वेग,

$$v^2 = u^2 + 2fs$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = 0 + 2\frac{\pi}{AB}\left(\frac{d(AB)}{dt}\right)^2 \pi\frac{AB}{2}$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \pi^2\left(\frac{d(AB)}{dt}\right)^2$$